数学学习中“数学表达”的前沿研究*

——路易丝·威尔金森(Louise Wilkinson)与赵凌云、李沐慧的对话

赵凌云¹ 李沐慧¹ [美]路易丝·威尔金森²

(1. 华东师范大学教师教育学院, 上海 200062; 2. 美国雪城大学教育学院, 纽约 13244)

摘要:国际知名数学语言研究专家路易丝·威尔金森教授在访谈中分析了数学表达的前沿研究,她认为数学学科有其独特的专业语言系统,学生在数学情境下给出正确的、合理的数学表达(mathematics register)是一项非常重要的能力。由于数学学习是基于多元表征的符号系统的建构,所以教师在教学中应给予学生充分的机会进行数学表达,并从学生的数学表达中探知他们对数学的理解。

关键词:路易丝·威尔金森;数学表达;数学学习;前沿研究

编者按:路易丝·威尔金森是美国雪城大学(Syracuse University)教育学院教授,1974年在哈佛大学获教育学博士学位,主要研究儿童的语言与数学语言学习。她不仅在国际学术期刊上公开发表了130余篇学术论文,而且出版的多部著作如《课堂互动与性别的关系》(Gender Influences in Classroom Interaction, 1985)、《整合语言艺术》(The Integrated Language Arts, 1994)、《学校语言与识字学习》(Language and Literacy Learning in Schools, 2004)、《城市教师教育的领导力》(Literacy Leadership in Urban Teacher Education, 2008),影响深远。威尔金森教授是美国心理学协会、美国应用和预防心理学协会和美国教育研究协会的研究员,兼美国教育部和国家科学基金会主席,现担任雪城大学和罗格斯大学(Rutgers University)教育学院院长,美国教育研究协会副会长,新泽西州立大学教育顾问,经济合作与发展组织和亚太经济合作组织(Organization for Economic Cooperation and the Development and Asian-Pacific Economic Cooperation Organization)代表。同时,她还是国际阅读协会(International Reading Association)、城市教师教育(Urban Teacher Education)的领导人,华东师范大学教育学部的客座教授。围绕数学语言与数学表达的相关研究,我们邀请了华东师范大学的赵凌云、李沐慧与威尔金森教授进行了对话。

一、数学表达的具体内涵

赵凌云(以下简称“赵”):尊敬的威尔金森教授,很荣幸您接受我们的访谈。您作为特邀教授来我校给“佛年计划”的研究生进行短期指导,您在报告中多次强调数学表达(mathematics register,以下简称“MR”)的重要性。在此之前,我们也拜读过您在数学教育领域尤其是语言方向发表的极具影响力的文章,请问您最近正在从事哪些方面的研究工作呢?

路易丝·威尔金森(以下简称“威尔金森”):近期我们主要聚焦于课堂上学生解决开放性问题的能力,进一步探究数学概念学习、数学理解与英语语言之间的关系。我们期望学生在解决问题时能够充分地运用口头语言及书面语言对可操作的对象进行解释,并鼓励学生积极、主动地交流,用语言表达他们的数学理解。

* 基金项目:教育部人文社会科学重点研究基地重大项目“中国学生数学素养测评研究(2016-2019)”(16JJD880023)。

赵:语言在数学学习中确实有着举足轻重的地位,您多年来一直聚焦于数学表达的相关研究。在我国内,也有研究者通过书面表达的形式来了解学生的数学学习状况,如数学日记、数学写作等,那么请问您提出的数学表达和这一类研究有什么异同呢?

威尔金森:我们关注的数学表达包括口头表达和书面表达,既包括表达和聆听,也包括阅读、解决问题和呈现答案。在研究数学问题解决过程中,我们关注学生解决问题的整个过程,不过我聚焦于学生在解决问题的过程中是如何运用英语语言的。学生在解决问题时,如 PISA (Program for International Student Assessment) 试题,首先需要通过阅读来理解有待于解决的问题,然后才是问题解决。当然问题解决是核心,但是阅读也很重要。在解决问题的过程中可能需要通过数字、图形等多种方式,才能最后作出回答。这里的作答不仅仅指给出答案,还包括对答案的解释。在学生解决问题过程中处处都需要语言表达,所以阅读、书写都很重要。我认为关于问题解决最有价值的研究就是学习小组共同解决问题的过程,因为在问题解决过程中有交流、倾听、争执、协调以及最终确定答案,所以,我们的数学表达指的是学生使用语言的多种表达方式,包括说话、倾听、阅读、书写等。数学表达不同于普通的语言表达,它使用的是一系列特定的数学词汇,如直径、斜边、垂直等,同时它的语法也比较复杂。在美国,数学教材都是用英文来呈现的,教材里的语法非常复杂,数学词汇很特殊,对问题的解释方式也是唯一的、不可替代的,这都是数学学科的特点。在正式测验中,复杂的应用题情境在语言理解方面对学生来说具有一定的难度。然而,数学测验主要目的并不在于考察学生是否理解问题的陈述,而在于检测学生是否掌握数学知识、是否可以运用掌握的数学知识成功地解决数学问题。但现实却是,学生需要去理解较为复杂的问题陈述并表述其解答过程。在美国测验中,仅写出答案是不够的,比如在“计算 $2 + 2 = ?$, 并给出你使用的方法”这样的题目中,学生不仅需要给出答案,而且还要使用数学表达阐述其完整的思考路径。可见,语言表达能力不仅会在一定程度上限制学生对数学知识的掌握,而且还可能影响学生的数学学业成绩,而这正是我们想要通过强调数学表达来改变的。

二、数学表达研究的缘起与意义

李沐慧(简称“李”):感谢威尔金森教授细致的陈述。语言能力问题影响数学学业成绩,这显然不是数学测验的意图。数学测验应该尽可能地检测学生对数学知识的理解和掌握情况,但是学生解答过程的呈现方式又不可能绕开语言问题,所以您的研究很有意义,对我们也颇有启发。我们在您的报告和论文中,发现您的研究聚焦于双语学生(bilingual students)的数学表达,请问您为什么选择这类学生呢?

威尔金森:首先,当下美国有近 450 万名学生是非英语母语的学生,其中约 80% 的学生来自说西班牙语的家庭。他们已经被美国政府界定为没有熟练掌握英语或者是获得课堂学习机会会有障碍的学生。这些学生被称为“英语学习者”(English learner students,简称“ELs”)。当然,在日常生活中他们也会说少量的英语,但还不足以应对数学教科书上复杂的表述。实际上,四年级及以上的数学学习非常依赖英语,而且涉及到较多数学专业的学术性英语词汇。

其次,学生数学学业成绩的相关数据显示:英语学习者作为一个群体,在标准化数学测试中,学业成绩比那些以英语为母语的学生低。所以,我们想探究为什么会出现这种情况以及怎样解决这个问题。在数学测试中,能够影响学生数学测试分数的因素不应该仅仅是英语语言的掌握情况,还应该包括学生的学习状况、学生对于数学测试知识的理解、学生对于测试的准备以及其他的一些影响因素。

此外,我们通过观察学生解决数学应用题的过程,发现了语言如何使英语学习者的数学学习变得困难重重,当然这些研究也适用于英语母语学生。这个问题有待我们进行更深入的探索。第四个原因是出于我对探索数学理解与英语语言知识之间的研究兴趣。在很大程度上,数学的教与学是由英语语言作为媒介来完成的,我想更好地揭示这个作用原理,也就是说在数学学习中提示英语怎样起作用的。从研究者的角度来看,我对英语语言的学习与数学学习、数学理解之间的关系很感兴趣,我常常把英语

语言比作一个棱镜(prisma),数学知识需要穿过语言这个棱镜。这个棱镜就是数学表达所扮演的角色。

赵:如果由于语言掌握的问题使得学生在理解数学问题或者由于数学语言表达出现障碍进而影响数学学业成绩的话,这对英语学习者来说确实是很吃亏的。那么在您的研究经验中,学生主要存在哪些数学表达的问题,这些因素又是怎样影响数学学业成绩?

威尔金森:这个问题我想通过举例子来说明。正如我在华东师范大学发表的演讲中所描述的,学习代数知识的阿里尔(Ariel),他是七年级的双语学生,我们对他进行了为期18个月的观察,记录他在解决问题的过程所需的数学知识和语言知识(口头和书面)。在我们开始观察时,我们提出了三个研究问题:(1)阿里尔在解决问题的过程中如何表达他的数学理解?(2)阿里尔在解决问题过程中是怎样进行数学表达的?(3)阿里尔怎样使用表征系统来解决语言(口头和书面)问题?我们发现,在阿里尔努力解决线性函数问题时,他通过尝试解决具体的代数问题呈现出他的数学理解。在探索代数思想时,他试图找出某种模式去理解。他经过了尝试解决问题、解决问题及将他的解决方案与他人交流的过程。在18个月的时间里,他与其他人讨论、绘制表格和图表及借助工具来描述他的理解。我们注意到,在阿里尔经历这些学习的过程中,他没有正确地使用数学表达。他经常会使用不规范的语言,如“run on”,而且他的口头表达也不清楚,他甚至发明了一些词语,如“thingy”。比如他陈述道:“当你移动这个thingy从这里到那里,它们就在一起啦”等。在最后的观察阶段,阿里尔通过学习代数知识,获得了表征系统,包括数学表达。这也就是说,最终阿里尔理解并解决了数学问题。只有经历这样的学习过程,他才能在数学学习中使用正确的数学表达来呈现他的理解。最后,他通过演讲更加准确地阐述了他的解决方案。在某种程度上,阿里尔的例子可以作为数学表达的样例,但这并不是数学表达的全部。

有位非常著名的数学教育研究者J. N. Moschkovich曾写过一篇关于两个学生数学问题解决过程的精彩文章,文中描述了学生们一起学习交流时常说的“you go by twos, you go by twos”等。这些当然不是规范的数学语言,不过这并没有影响学生的问题解决。但在正式测试中,类似于“thingy”“go by twos”这类词汇的使用是不被认可的,然而,这些“错误”的数学表达在美国数学教学中却普遍存在。

数学学习就是多元表征符号系统的建构,因此在数学教与学的过程中,作为数学表达的听、说、读、写能力都非常重要。在解决问题的过程中,每个方面都可能直接影响学生的数学学业成绩,所以教师在课堂教学中需要关注学生在数学表达方面存在的问题。我们不仅希望学生能够理解数学,还希望他们能够解决复杂情境的应用题(words problem),并能够使用恰当的数学表达来阐释他们的数学理解。我们希望发展学生关于数学表达的专业性语言体系。

李:有研究表明,我们国内也存在因为数学表达能力影响学生学业成绩的情况。由于学生不能准确理解题意导致不能正确地解决问题。正如波利亚(George Polya)在《怎样解题》一书中认为的那样,解题的第一步就是理解题目,正确理解题意是解决问题的前提。不过语言问题影响数学学业成绩的研究在我国国内还没有被充分关注。我相信您的研究将给我们指出一个新的研究话题。请问您认为数学表达体系是如何发展建立起来的?

威尔金森:这个问题要追溯到一位知名的语言学家M. A. K. Halliday。在语言学中,当我们谈及“表达”(word register)一词时,往往指的是一种语言,它不仅特指数学表达(mathematics register),也可指我们的日常表达。Halliday指出每个领域都有一种特殊的交流和写作方式,当然数学学科有其特有的词汇、语法和资源结构,而这样的语言表达和其他学科如历史学科所使用的语言是不同的。在研究中我们也发现,在某些领域的专业学术表达是一致的,所以有些词汇和语法是跨学科存在的。

赵:这也就是说每个领域的表达既有彼此独立的成分,又存在共通之处,而且现在不同的学科之间也已经出现慢慢融合、互相贯通的趋势。不过在数学领域确实存在较多日常生活中很少涉及且具有特定数学含义的词汇,这也使得部分学生在数学表达方面存在困难。近年来数学表达也日渐受到研究者和教育者们的重视,那么我们如何做到更全面、更深入地评价学生数学表达能力呢?

威尔金森:在一些大型国际测试中,专家们已经开始研究学生在问题解决中使用的“词汇”,尤其是许多测试要求学生必须写出解决方案及其对应的解释。专家们会在事前做出评分表(scoring sheet),第一步是让学生“陈述”(statement),说出该问题解决的情况,要求学生提供结论及解释,像“thingy”“go by twos”这样的词汇是不允许出现的;其次是数学专业词汇的规范性,如“弦”“直径”“垂直”“线性函数”“平行四边形”等;第三是句子的完整性、正确性;第四是单词拼写的正确性;最后我们也关注标点符号使用的正确性。在美国的一些大型测试中,解释过程往往比正确的答案更重要,学生可以得到“不正确的答案”,但只要呈现的解决过程中包括所有必要的问题解决要素,评价者是可以给予好成绩的。我不清楚中国学生的数学表达怎样,不过我相信这是个很好的研究视角。

三、聚焦数学表达的关键事件分析法

赵:专家依据设计好的评分表从陈述、词汇、句子以及标点符号的使用这几个方面对学生的数学表达进行评价具有很强的可操作性,这种方法值得我们借鉴。我国目前的数学评价更多地指向答案的正确与否,不过我们也正在努力从结果性评价转向过程性评价。那么您在具体的研究过程中使用怎样的研究方法?

威尔金森:我们使用录像和录音的方式记录每个学生的所有表现,再从视频和转录材料中抽取“关键事件”(critical event)。我们的研究对象实际上是抽样部分,当然也不可能研究视频中的一切。一般的抽样方式有两种:一种称为时间抽样,另一种是事件抽样。这就好比煲汤,我们不可能品尝整碗汤,也不可能在煲汤过程中每时每刻都进行品尝,所以只有通过抽样的方式进行判断。类似地,在研究中,我们可以抽取完整课堂为样本,也可以选取前5分钟作为时间抽样;另一种抽样方式则完全不同,我们称之为“关键事件抽样”(critical eventsampling),即记录课堂中发生的所有事情,然后选取关键事件进行分析。上周在我演讲的问答环节有学生问:“您怎么判断一个事件是关键事件?”实际上,我们使用理论分析框架支持我们选择关键事件,如“学生在问题解决过程中表现出的洞察力,遇到困难、出现错误时正确地解决问题的能力”等。所以,虽然我们观察的是完整一节课,但实际的研究对象只是抽取出的“关键事件”。

四、美国数学教师在课堂教学中如何践行数学表达?

赵:对于大量的视频资料,关键事件抽样法确实很精彩、很高效,不过合理地提取关键事件还是需要一定的研究功底,我们可能还需要进一步地学习才能深入体会其中的奥妙。那么,您在研究中关于数学表达教学的操作性定义是怎样的呢?美国的数学教师在教学过程中会参考您提出的数学表达教学理念吗?他们又是如何践行这一理念的呢?

威尔金森:从教学实践层面来说,我们需要考虑下面的两个问题:教师是否应该树立数学表达的榜样(model)?教师是否应该提供学习机会让学生了解数学知识的多重表征(multiple representations),包括数学表达?

对于第一个问题,我的答案是“是的”。教师应该使用学生能够理解的方式表达和书写,同时向学生展示准确的数学表达。对于第二个问题,首先,英语学习者应该使用他们所有的资源,包括语言的和非语言的,来掌握和解决数学问题。因此,我们应该鼓励教师创造情境(to create situations),把基本的数学知识和技能嵌入到教学任务(instructional tasks)中,并指导学生使用正确的数学表达。英语学习者,如阿里尔在开始学习时,可能会使用实物来构建模型;然后通过计数或写西班牙语符号寻找解决问题的模式,并最终形成问题的解决方案;再向他提供真实的学习机会和关键的支持,最终使阿里尔这样的学生能用英语准确地表达他的理解。当然,我们不能指望所有的学生,特别是英语学习者在最开始就能够完美地运用数学表达。另外,数学专业词汇的掌握是英语学习者面临的另一个挑战,现有的研究已经明确了英语学习者的词汇分布在两种语言中(本地和第二语言),而底层语义基础(underlying

semantic base)大于任一种语言的词汇。另外,英语学习者往往没有大量的互译词汇(overlapping vocabulary),所以我们不应该期望他们从一开始就能够使用准确的英语进行数学表达。在此期间,英语学习者可能会抵制使用两种语言来学习数学专业词汇。教师必须要意识到这一点,即应当允许并尊重英语学习者在解决数学问题中使用他们熟悉的语言。

教师实施数学表达的具体步骤是:首先,教师必须树立数学表达的榜样(model),在课堂教学中必须使用精准的数学表达,不能使用类似于“嗯,你把那个数字移到哪里……”等这样不规范表达方式。第二,数学教师需要对专业术语进行反复表达(revoice)、不断重述(recast),比如涉及到线性函数时,学生也许不能深刻地理解线性函数的含义,那么教师就要重述线性函数的具体内涵。当学生不能恰当地进行数学表达时,教师应该寻找适当时机,用数学术语重述他们的解决方案。数学表达对美国教师提出的要求,实际上就是从榜样和重述两个方面落实的。第三,我们不能奢望学生特别是双语学生,在课程开始时就能够使用完美的数学表达。让刚开始的学生走进课堂并兴奋地参与到问题解决中来是最重要的,所以在课堂教学过程中任务设计(task design)至关重要。在美国,教师必须依照数学内容进行合理的任务设计,使得每个学生都能真正参与到问题解决中来。

2017年5月,我有幸能够旁听上海郊区学校的一节数学课,任课教师是一位优秀的青年教师。我看到教室里整齐地坐着55位学生,我试图观察每位学生的行为,发现有一个小女孩,整节课都静静地坐在座位上,我没有观察到她有任何行为,也不知道她脑袋里想些什么。下课后,我私下询问任课教师:“如果您班级里有学生没有较好地掌握您所教授的知识,你会怎么做?”她说,“我会在课后给他们提供帮助”。我对这种说法表示怀疑。班上有55个学生,这位教师如何帮助到所有没能跟上教师节奏的学生?

赵:您陈述的这种情况可能在我国当下的课堂上是存在的,有极少部分学生不能够积极地参与到教师的课堂教学过程中来。当然,其中原因可能也各不相同,教师有可能忽视部分学习困难的学生。针对这种现象,上海曾经实施小班化教学改革,将班级人数会控制在25左右,让每个学生有参与学习活动的机会。可惜,目前的常规班级基本上还是有四十位左右的学生,教师要关注到每一个学生,是非常困难的。

威尔金森:对,这就是我刚开始说的。当然我对这里课堂不够了解,也不能给出很合理的判断,我只是很好奇教师对待这种现象发生时的对策。对美国教师来说,设计驱动每个学生都参与的学习任务非常重要,我们要求学生真正地参与问题解决中来。所以,以上就是美国数学教师在课堂教学中对数学表达的具体落实。

李:美国数学教师从设计合理的任务、鼓励学生积极参与、树立榜样、强调重述四个层面来落实数学表达,这对数学教师来说确实非常重要。当然,教学效果在教学过程中或者教学结束后也很重要,一般来说教师需要对学生的学习进行合理的反馈与评价。那么美国数学教师是如何对学生的教学过程或者学习结果中的数学表达进行评价的?

威尔金森:美国教师主要评价学生有没有掌握数学知识。从评价角度来说,最重要的是学生对数学知识的理解,学生是否能够进行“建构”,而不是“跟随程序”。数学教学的目标是发现、理解和创造,不能仅停留在记忆、应用层面。有些学生可能会给出一些非常奇怪的问题解决过程,如涉及手指或脚趾计数等,但重要的还是学生在努力地建构自己的认知,评价者更为注重建构的过程。

赵:基于数学理解的过程性评价确实是更为合理的评价方式,比如我们国内很多数学试题涉及到复杂的计算,有些学生可能只是因为计算问题导致了错误的结果,如果只是关注结果的评价,对于学生问题解决能力的评价是欠缺的,这样的评价方式很难全面地反映学生真实的数学能力。近年来,过程性评价在我们国内研究领域受到广泛的关注,不过这对评价者提出了很大的挑战。这类聚焦数学表达的过程性评价对目前我国数学教师来说要真正落实可能有一定的难度,我想这也是我们数学课程改革需要不断努力的方向。在美国数学课堂教学中,是否也存在学生不能积极地参与教师设计的任务学习

的情况呢?

威尔金森:这一点我不能给出准确的答案,但是可以肯定的是美国学生在数学学业成绩上有很大的差别,有些学生的数学成绩很好,有的也很差。很差的学生不能从课程中受益,学业成就非常低,这是非常悲哀的。事实上,我们的目标是让每个学生都能学好数学,并获得数学学习的快乐。但现在的问题是,我们的教学没有尽可能多地帮助更多的学生,所以这方面是我们需要努力改变的现状。著名的俄罗斯心理学家维果茨基(Vygotsky)认为“知识是通过社会互动构建起来的”,大多数学生需要对他们真正有意义的任务设计,通过小组讨论,帮助他们建构起认知的过程。这个过程就需要教师在解决问题过程中树立数学表达的榜样,需要反复地表达与重述,并且给予学生适当的鼓励与支持,这才是教学的应然状态。

五、数学表达在教师专业发展中的地位

李:学生数学表达能力的培养在数学教育中确实非常重要,也应该是教师开展数学教学任务的重要目标之一。也许在未来教师的职前培养和在职教师的专业发展中,需要让他们充分认识到数学表达的重要性。您能基于您的研究给出一些在教师教育领域关于数学表达的研究建议吗?

威尔金森:首先教师需要了解数学表达的意义。虽然数学是关于数学知识本身的理解,但它必须通过语言作为媒介,所以数学表达既是数学学习的起点也是终点。教师无法直接告诉学生如何掌握数学表达,只能通过不断地分析句子,解读难懂的词汇,或者重述繁琐的专业术语等方式来促进学生更好地进行数学表达。例如,当学生在具体的情境中遇到如斜边、垂直这些专业术语时,教师首先需要让学生解释并与同学讨论,让他们自己去发现、接触、建构这些词汇表达的意义;然后通过设计合理的任务、树立数学表达“榜样”,多次重复,给予学生鼓励,促进学生形成良好的数学表达。当然,我们也不能直接要求教师这样做,而应该让教师去实践。当教师看到基于数学表达的数学教学具有较好的效果时,他们就会自愿地学习并践行这一理念。

赵:教师在学校教育过程中的地位和作用是无可替代的。近年来教育界也非常重视教师专业发展,比如PCK(Pedagogical Content Knowledge),MPCK(Mathematics Pedagogical Content Knowledge),MKT(Mathematics Knowledge for Teaching)等概念不断地出现,是不是可以说数学表达(MR)也是数学教师专业发展必备的一种技能?

威尔金森:是的,这就是我想表达的。数学表达能力对于数学教师来说是非常重要的。如果教师不说话,只是演示,那么学生只是知道你把这个东西移过来移过去,他们也只能建立起形象表征。在美国,对于英语学习者来说,聚焦数学表达的教学真的非常重要。虽然英语是我们的官方语言,但很多移民学生的第一语言不是英语,所以美国的每位教师本身就是一名英语语言教师,也包括数学教师。所以数学教师在教学时,他必须努力成为数学表达的榜样。每个数学教师必须不断地对自我的元认知进行反思,这种反思不仅仅是数学知识本身,而且包括数学表达。在美国,我相信每位教师都应该是英语教师,每位数学教师都是数学表达的教师。这就是我们的目标,也是我们对数学表达的解读。

赵 & 李:非常感谢您对我们的问题给出的细致回答,这不仅让我们对数学表达有了更深入的理解,还让我们充分意识到数学表达对于数学教师、对于学生数学学习的重要性。

威尔金森:非常感谢你们的问题。

(致谢:特别感谢徐斌艳教授对本访谈的悉心指导,感谢Hussain Safdar博士在访谈翻译工作中给予的帮助。)

(责任编辑 董想文)

body includes the state parliament and the state government. The effective legal sources of compulsory education in Germany include not only the school law or the compulsory education law enacted by the legislature, but also the compulsory education regulations issued by the state governments under the authorization of the school law. The compulsory education law mainly regulates the object of compulsory education, the age and duration of compulsory education, the type and form of compulsory education, and the legal responsibility of compulsory education. Germany's compulsory education law focuses on the adjustment of behavior, the setting of obligations, and the standard procedures.

Keywords: Germany; compulsory education legislation; legislative characteristics

The Frontier Research on Mathematical Register in Mathematics Learning: An Interview with Louise Wilkinson

ZHAO Lingyun¹ LI Muhui¹ Louise WILKINSON²

- (1. College of Teacher Education, East China Normal University, Shanghai 200062, China;
2. Educational Department, Syracuse University, New York 13244, USA)

Abstract: In this interview, Professor Louise Wilkinson, an internationally renowned expert in mathematical linguistics, analyzed the frontiers of mathematical register in mathematics learning. Mathematics has its unique professional language system. It is a very important ability for students to give correct and reasonable expression in the context of mathematics. It includes not only the oral language, but also the written language. Mathematics learning is a system based on multivariate representation, so teachers should provide with students with sufficient opportunities to use their own mathematical register in teaching, and these expressions offer teachers some insights into the students' understanding of mathematics.

Keywords: Louise Wilkinson; mathematical register; mathematics learning; frontier research